Решение задач с помощью координатного метода

Методические рекомендации.

С помощью данных методических рекомендаций можно научиться решать задачи на вычисление углов и расстояний в стереометрии с помощью координатно-векторного метода. Представленный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними). Достоинство метода координат состоит в том, что его применение избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространств

Рассмотрим решение задач с помощью координатного метода.

Задача 1. Дано: прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; DA=1; DC=2; DD_1=3. Найти: угол между прямыми CB_1 и D_1B.

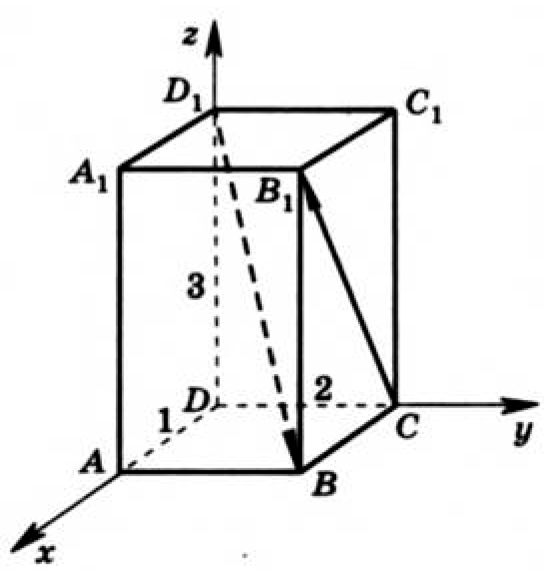


Рис. 1.

Решение: Введем систему координат Dxyz (см. рис. 1) и найдем направляющие векторы D_1B и CB_1. Для этого сначала найдем координаты точек D_1, B, C и B_1, так как через них проходят нужные нам прямые. $D_1(0;0;3)$, $B(1;2;0)$, $C(0;2;0)$, $B_1(1;2;3)$. Зная координаты точек, мы можем найти координаты направляющих векторов, вычитая из координат конца координаты начала вектора: $\overline{D_1B}\{1;2;-3\}$, $\overline{CB_1}\{1;0;3\}$. Найдем косинус угла между прямыми CB_1 и D_1B:

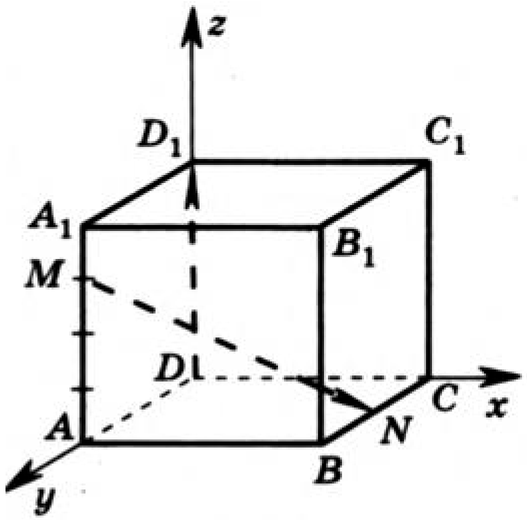
$$\cos\angle(CB_1;D_1B)=\frac{\left|\overline{D_1B}\cdot\overline{CB_1}\right|}{\left|\overline{D_1B}\right|\cdot\left|\overline{CB_1}\right|}=\frac{|1\cdot1+2\cdot0+3\cdot(-3)|}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{1+0+9}}=\frac{4}{\sqrt{35}}.$$

Значит, $\angle(CB_1;D_1B)=\arccos\frac{4}{\sqrt{35}}$.

Задача 2. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб; точка M лежит на ребре AA_1; $AM:MA_1=3:1$,N-середина BC.

Найти: косинус угла между прямыми MN и DD_1.

Рис. 2.



Решение: Введем систему координат Dxyz (см. рис 2). Так как $A_1M = \frac{1}{4}AA_1$, удобно взять ребро куба равное 4а – АВ=4а, тогда нужные нам точки выражаются целыми числами. Пусть ребро куба равно 4а, тогда координаты точек: $M(4a;0;3a)$, $N(2a;4a;0)$, $D_1(0;0;4a)$. Зная координаты этих точек, мы можем найти направляющие вектора прямых DD_1 и MN: $\overline{MN}\{-2a;4a;-3a\}$, $\overline{DD_1}\{0;0;4a\}$. По формуле находим косинус угла между прямыми:

$$\cos\angle(MN;DD_1) = \frac{\left|\overline{MN}\cdot\overline{DD_1}\right|}{\left|\overline{MN}\right|\cdot\left|\overline{DD_1}\right|} = \frac{\left|4\cdot 0-2\cdot 0+3\cdot 4\right|}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{16}} = \frac{3}{\sqrt{29}}.$$

Задача 3. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный параллелепипед; $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$.Найти: угол между прямыми BD и CD_1.

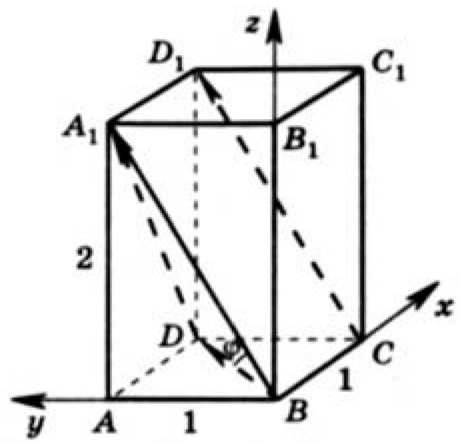


Рис. 3.

Решение: Введем систему координат Bxyz (см. рис.3) и найдем направляющие векторы прямых BD и CD1. Пусть AB=BC=a, тогда AA_1=2a. Теперь найдем координаты точек B, D, C и D_1: B(0;0;0), D(a;a;0), C(a;0;0), D_1(a;a;2a). Чтобы найти угол между прямыми, необходимо найти направляющие векторы этих прямых: $\overrightarrow{BD}\{a;a;0\}$, $\overrightarrow{CD_1}\{0;a;2a\}$.

Применим формулу для нахождение косинуса угла между прямыми:

$$\cos\angle(BD;CD_1) = \frac{\left|\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD_1}\right|} = \frac{\left|a\cdot 0-a\cdot a+0\cdot 2a\right|}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{5a^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

2-ой способ решения: Существует второе решение задачи №3 без использования векторов. Для такого решения построим угол между прямыми BD и CD_1 с помощью параллельного переноса прямой CD_1на плоскость ABA_1, получим прямую BA_1. Значит, угол A_1BD – равен искомому.

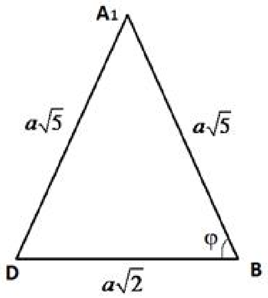


Рис. 4.

Для удобства нарисуем заново и рассмотрим треугольник A_1BD (см. рис. 4). Искомый угол φ – угол при вершине B. Найдем стороны треугольника A_1BD. Сторона BD – это диагональ квадрата, лежащего в основании параллелепипеда, $BD = a\sqrt{2}$. $DA_1 = BA_1 = a\sqrt{5}$. Таким образом, мы знаем стороны треугольника. Чтобы найти угол при вершине B, записываем теорему косинусов для противолежащей стороны: $A_1D^2 = A_1B^2 + BD^2 - 2 \cdot A_1B \cdot BD \cdot \cos\varphi$.

$$\cos\varphi = \frac{5a^2 + 2a^2 - 5a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Для того чтобы использовать метод координат, надо хорошо знать формулы.

Их три:

1. Главная формула — косинус угла φ между векторами a = (x_1; y_1; z_1) и b = (x_2; y_2; z_2):
$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$
2. Уравнение плоскости в трехмерном пространстве:
Ax + By + Cz + D = 0, где A, B, C и D — действительные числа, причем, если плоскость проходит через начало координат, D = 0. если не проходит, то D = 1.
3. Вектор, перпендикулярный к плоскости Ax + By + Cz + D = 0, имеет координаты: n = (A; B; C).
4.

<u>Задача.</u> Найти косинус угла между векторами a = (4; 3; 0) и b = (0; 12; 5).

Решение. Поскольку координаты векторов нам даны, подставляем их в первую формулу:

$$\cos\varphi = \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 12 + 0 \cdot 5}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 12^2 + 5^2}} = \frac{36}{5 \cdot 13} = \frac{36}{65}$$

<u>Задача</u>. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки

M = (2; 0; 1), N = (0; 1; 1) и K = (2; 1; 0), если известно, что она не проходит через начало координат.

Решение. Общее уравнение плоскости: Ax + By + Cz + D = 0, но, поскольку искомая плоскость не проходит через начало координат — точку (0; 0; 0) — то положим D = 1. Поскольку эта плоскость проходит через точки M, N и K, то координаты этих точек должны обращать уравнение в верное числовое равенство.

Подставим вместо x, y и z координаты точки M = (2; 0; 1). Имеем:
A · 2 + B · 0 + C · 1 + 1 = 0 ⇒ 2A + C + 1 = 0;

Аналогично, для точек N = (0; 1; 1) и K = (2; 1; 0) получим уравнения:
A · 0 + B · 1 + C · 1 + 1 = 0 ⇒ B + C + 1 = 0;
A · 2 + B · 1 + C · 0 + 1 = 0 ⇒ 2A + B + 1 = 0;

Итак, у нас есть три уравнения и три неизвестных. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A + C + 1 = 0 \\ B + C + 1 = 0 \\ 2A + B + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} A = -0{,}25 \\ B = -0{,}5 \\ C = -0{,}5 \end{cases}$$

Получили, что уравнение плоскости имеет вид: − 0,25x − 0,5y − 0,5z + 1 = 0.

<u>Задача.</u> Плоскость задана уравнением 7x − 2y + 4z + 1 = 0. Найти координаты вектора, перпендикулярного данной плоскости.

Решение. Используя третью формулу, получаем n = (7; − 2; 4)